第二讲 数学学习理论

〇、开场白

上节课我们聊过，数学教育的**立足点应该**是数学学习理论。只有真正了解学生学习数学的学习特点和学习规律，才能为数学教学的设计和实施提供确切的理论根据。我们这一讲就从几个不同的侧面来了解一下数学学习应该是怎么回事。

一、数学学习是数学认知结构不断完善的过程

认知结构是认知主义心理学的一个概念，简单地讲，认知结构就是学习者头脑里的知识结构。而**数学认知结构，就是学习者把头脑里的数学知识按照自己的理解深度、广度，结合自己的感觉、知觉、记忆、思维、联想等认知特点，组合成的一个具有内部规律的整体结构**（曹才翰，蔡金法：《数学教育学概论》）。

我们过去有一个比喻。说学生是一棵小树苗，教师是一个园丁，知识就是园丁手里要浇的水、要施的肥。教师的教学过程是怎么回事呢？那自然是园丁去给小树苗浇水施肥。现在我们学习了认知结构，我们再看这个比喻，它是不是有什么问题呢？

（讨论）

问题就在于知识是有结构的，水或者化肥的比喻体现不出这种结构性。所以从今天开始，大家应该树立正确的数学学习观。你学习不是说你的脑子是个空杯子，老师把知识这种“水”倒进你的杯子——**知识学习不应该是从外界强加的，而是融入旧有认知结构或者接纳新的认知结构的过程**。

注意我说了两个词，一个是“融入”，一个“接纳”。我们考虑现学生学习新的数学知识的过程。如果这个新知识与原有的数学认知结构中某些知识联系很紧密，那么通过新旧知识的相互作用，新知识就被纳入原有的数学认知结构，从而扩大了它的内容，这种作用过程称为**同化**，也就是我说的“融入”的过程。如果新知识在原有的数学认知结中没有适当的知识与它联系，或者虽然有但是联系很弱，那么数学学习的过程就是对原有的数学认知结构进行改组，或者至少是部分改组，进而形成新的数学认知结构，并把新的知识接纳进去，这种作用过程叫做**顺应**，也就是我说的“接纳”过程。

我们数学系大一新生都要学空间解析几何这门课。这个课有两个重点，一是平面的方程，一是空间直线的方程。这两个知识的讲解就有门道。

先说空间直线的方程，它是从“点向式方程”入手的。所谓点向式方程，也就是已知直线上一点$M_0(x_0,y_0,z_0)$与直线的方向向量$\vec{v}=\{X,Y,Z\}$，然后求出直线的方程，即$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}$。如果在教学的时候，不管大一学生原有的知识结构，而是硬生生地直接讲空间直线的点向式方程，那就是灌输式的教学，是不利于学生学习新知识的。那么大一新生的原有的知识结构里有没有关于直线方程的内容呢？有，就是中学里学的平面解析几何里的平面直线的方程。中学阶段也会学到（平面）直线的点向式方程，但是用得很少，学生们印象最深的其实是点斜式方程（斜截式也是特殊的点斜式）。所谓平面直线的点斜式方程，就是已知直线上一点$M_0(x_0,y_0)$与直线的斜率 k，然后求出直线方程，即$y-y_0=k(x-x_0)$。在讲解空间直线的点向式方程的时候，可以先从平面直线的点斜式入手，然后分析点斜式的方法在研究空间直线的时候还能不能用？当然不能用，哪里出了问题？空间直角坐标系有三个坐标，而斜率只是两个坐

标的变化量之比，显然斜率已经没有意义了。所以需要一个东西代替斜率的作用。那么斜率在平面直线的点斜式方程上起什么作用？它体现了直线的方向。那么在空间直角坐标系中，什么能体现直线的方向？当然一个与直线平行的向量，这就自然引出了直线的方向向量。然后有了直线上一点的坐标与直线的方向向量怎么求直线的方程？再借助学生们在前几节课上已经学的求动点轨迹的向径法就可以展开具体的推导了。这就是在学生原有认知结构基础上，**同化**了新知识。

这个课上还要讲平面的方程。这和空间直线的方程的讲授方法又不一样了。因为学生原有的认知结构中没有平面方程的内容，中学里只是学习了立体几何里关于平面的一些知识，比如三点确定一平面、平面上一点与平面上一直线可以确定一个平面。这个时候，我们就不能使用**同化**这个作用过程了，而应该考虑第二种情况，即**顺应**。也就是说，我们要对学生原有的知识结构进行一种改组，使之接受新知识。具体来说，如果我们要讲平面的点位式方程，即已知平面上一点$M_0(x_0,y_0,z_0)$和平面的两个方位向量$\vec{a}=\{X_1,Y_1,Z_1\}$和$\vec{b}=\{X_2,Y_2,Z_2\}$（平面的方位向量是两个平行于该平面且不共线的向量），然后求平面的方程。高中的立体几何中有一个结论，说：平面上一点与平面上一直线可以确定一个平面。我们可以适当改造这个知识点，从此处入手引导学生思考：在空间解析几何中，我们总是要用向量来思考的，那么这里的“平面上一直线”能不能换成“与平面的平行的一个向量”呢？经过讨论，学生们会发现：不行，这样不能确定唯一的平面，必须加条件——直接的想法：一个向量不行，那就两个向量，这就引出了平面的方位向量的概念。此时，学生原有的认知结构中关于“确定一个平面的条件”这一部分就发生了重组，从“平面上一点与平面上一直线可以确定一个平面”派生出了“平面上一点与平面的两个方位向量可以确定一个平面”。而后者就为继续学习平面的点位式方程留下了认知结构中的一个位置。

这是大学课程中的一个例子。中小学课堂上更为常见。先举一个同化学习的例子。比如说，初中生要学一元二次方程，可能与原有认知结构中哪些部分产生相互作用呢？合并同类项、完全平方公式、平方差公式、因式分解、算术平方根。当学生将一元二次方程学会并融入他的知识结构之后，其认知结构的这一部分又将会与未来学习的二次函数、圆以及各种圆锥曲线的方程等内容相互作用。

中小学数学里，顺应学习的例子也很多。比较典型的就是初中一年级学生开始学习代数的例子。也就是说，这时的初一学生要学习如何用字母代替数进行运算。这样，它们面临两大难题：一、按照皮亚杰的认知发展理论，初中一年级的学生恰好处于由“具体运算阶段”向“符号运算阶段”的过渡期（认知发展理论我们下一部分会讲到），所以学生在学习这部分知识时会明显出现一个“断崖”，有一些学生从此开始数学就跟不上了；二、在此之前，也就是小学阶段的数学基本上就是数的运算，学生的认知结构里几乎没有与之呼应的东西（小学阶段已经初步接触了未知量 x 和一些极其简单的方程，但是难以构成同化学习），所以他们在学习时会出现一些“不知其所以然”的情况。在这里教师应该引导学生：之所以要用字母代替数进行计算，是为了更方便地对数进行计算，因为用字母代替数运算可以实现“先化简再求值”。经过对比，改造学生原有的认知结构，才能更有效地让学生们学习代数，这个时候，数学教师的作用就体现出来了。

可见，数学学习确实应该通过对认知结构的改善来实现。所以，**数学教学是需要根据数学认知结构来进行设计的**。一方面，它可以避免灌输式的教育；另一方面也有助于培养学生对数学的探究精神；第三，这种学习和教学有助于完善学生的知识体系，使学生能融会贯通，实现一种“有意义的学习”（奥苏伯尔的观点）。

与“有意义的学习”相对的是“机械学习”。如果一个学生在学习数学时，只是记住了某个符号、背下了某个公式，这种学习就是机械学习。在数学认知结构没有发

生改变——即没有对所学知识有足够的融会贯通——的前提下，强调机械学习对学习数学知识、提高数学能力是极其不利的。但是另一方面，也**不应一味地排斥机械学习**。在已经实现了认知结构改善的前提下，适度地机械学习有助于巩固学习成果。例如，我们大家小学学习乘法时，都背过乘法口诀；再比如我们中学学过三角函数的诱导公式之后，一般都背过著名的口诀："奇变偶不变，符号看象限"。这些都是机械学习。比如后一个例子，在学生已经对三角函数的诱导公式做了充分理解的基础上，记住这些口诀，对巩固知识提高成绩是有很好效果。近年关于国外小学数学教学的一些新闻很能说明问题，比如欧美国家公民的计算能力较差，再比如英国全面引进我国上海的小学数学教科书和数学教学法。这些情况与他们长期过度排斥机械学习不无关系。

与机械学习密切相关的一种数学学习理论，是我们下面要讲到的操作性数学学习理论（见张奠宙等：《数学教育概论（第三版）》，第五章第二节）。

二、数学练习与操作性数学学习

美国行为主义心理学家桑代克认为，学习是一个不断"试错"的过程。正是通过"试错"的过程，刺激与反应之间建立了"联结"，从而实现了学习。他的后继者斯金纳更是将这种通过"试错"实现"联结"的理论发展成为了"操作性学习理论"。需要注意的是，仅仅一次试错是无法实现"联结"的，因此，操作性学习理论强调学习需要大量的练习。

关于这个理论，大家可以自行搜索"饿猫迷笼实验"。我们这里更关注这一理论与数学学习的关系。

20 世纪 20 年代，桑代克编写了《算术心理学》，就体现了这种学习理论之下的数学学习观。他的核心思想就是：首先将所要学习的数学内容分解成若干小片段，然后让学生按步骤进行操作。对每个小片段反复训练，克服错误。如果所有的小片段都操作熟练了、错误很少了，那么这个数学内容就学会了。比如说，他将两位数的竖式乘法分解为十五个步骤，《数学教育概论（第三版）》（张奠宙等）的 116 页详细列出这些步骤。他认为学生反复熟悉这十五个步骤就能学会竖式乘法。

对于操作性数学学习理论，我们应该从正反两个方面去理解。

一方面，**数学学习确实需要大量的训练，也就是大量做题**，而做每个数学题，确实都有一个实现步骤的问题。**我们不应该片面地说，学习数学只需要关注认知结构就足矣**。即使我们到了大学，学习那些非常高深的数学，我们依然需要大量地做题，来巩固和熟悉我们所学的知识、来训练我们的数学技能、来形成我们中学老师反复说到的"数学题感"。我们不妨做个类比。学数学跟学体育比较，虽然两者天差地别，但是却有着一个惊人的相似之处。先看体育，一个体育系的学生需要什么样的素质？当然是足够强的体能体力和身体灵活性。怎么获得？只能是反复的体育训练。同样的，对一个数学系的学生，或者一个学数学的学生而言，我们需要培养他什么？当然是掌握数学知识和数学能力。如何实现？和体育生一样，训练，数学训练——也就是做数学题。之前举过英国引进上海小学数学教学体系的例子也能说明这一点。除了之前说过的我们还保持着一些机械学习的因素以外，我认为还有两个原因，其中之一就是：我们的小学数学教学仍然保留了大量的分步骤的数学训练。这是我们的一个优势。虽然现在提倡"减负"，但是不应该把我们的优势抛弃，我们应该**有批判地继承**。

这个学习理论还提醒我们未来的数学教育工作者们：在实际工作中，仅有好的教学和好的教学设计是不够的，我们还需要 **"执行力"**，也就是你能不能在实现好的教学之后，完善后续工作，即**督促学生完成练习、给学生答疑、纠正学生做题中出现的**

错误，从而完成桑代克所说的“试错”的过程。我认为这是我国小学数学胜过英国小学数学的第三个法宝。我们各级教育部门（从国家一级到最低一级，即各个学校）有各级的数学教研机构，它们的逐级督促和约束，实现各级的“执行力”。这重重的执行力，最终保证了学校教学的有效性。我们回头看，如今大学教育的有效性如何呢？当大家进入大学以后，没有人督促你们学习，尤其是课后作业以及作业的订正，也缺乏足够的来自任课教师的答疑，那么我们大学教育的有效性应该如何保证？我想这是一个值得我们每一个师生深思的问题。

另一方面，行为主义的操作性数学学习理论有两大弊端。第一、大量的练习很容易演变成“题海战术”。究竟应该如何出题、如何做题、如何讲题，这是一门学问，我们以后会专门抽出课时来讨论这个话题。第二个弊端在于，操作性学习理论将一个数学内容的学习拆解成一系列步骤，也叫所谓“程序教学法”。这容易造成学生过度关注部分而忽视整体，即所谓只见树木不见森林。也容易使学生的数学学习流于表面的“做题程序”，因为数学思想本身是有一定深度的，学生如果只满足于“做题程序”而没有深刻地思考，就会出现“只顾低头拉车，不顾抬头看路”的问题。

当我们把行为主义的学习观和认知主义的学习观结合起来，我们才能发现，优秀的数学学习应该**既关注认知结构的变化又关注操作性、步骤性的训练**，应该**既注重有意义的学习又不排斥机械学习**，而作为教育工作者**既要重视教学又要重视教学之后巩固和练习**。

三、数学学习是有阶段性的

还是让我们回到认知结构这个话题。很显然，一个人的认知结构是在不断发展变化的，所以不同年龄段的学生在认知结构会有明显差异。瑞士心理学家皮亚杰最早系统地研究了这种差异，提出了著名的认知发展理论。

皮亚杰最初研究生物学，十几岁就开始发表论文，22 岁获得生物学博士与哲学博士两个学位。随后几年间，他陆续有了两个女儿和一个儿子。儿女的成长使他对儿童的认知发展过程产生了浓厚的兴趣。随着他对他三个儿女的成长历程的观察研究，他逐渐意识到人类的认知发展过程是有阶段性的，不能盲目跳过某个阶段，必须按部就班。他将人类的认知发展分为四个阶段，即**感知运动阶段**、**前运算阶段**、**具体运算阶段**和**形式运算阶段**，如下表所示（摘自【美】罗伯特·斯莱文的《教育心理学·理论与实践》）

阶段	大致年龄	主要表现
感知运动阶段	出生到 2 岁	✧ 从本能行为发展到更有目的性的行为； ✧ 逐渐认识到客体永久性
前运算阶段	2 岁到 7 岁	✧ 可以用语言来表达对客观世界的理解； ✧ 但是不能理解“守恒性”； ✧ 思维上是自我中心的
具体运算阶段	7 岁到 11 岁	✧ 对于熟悉的情景和对象，逐渐具备运算和逻辑能力，缺乏抽象能力和形式运算能力；“儿童不是理论家！”（弗拉维尔） ✧ 自我中心逐渐消退，客观思维开始发展
形式运算阶段	11 岁到成年	✧ 逐渐开始抽象思维、能够了解各种可能性而不受眼前具体情况的限制。运算和逻辑判断可以根据假设情况来展开

在感觉运动阶段，儿童主要发展了它们对外部世界的直观感受，他们的语言和思维还处于一种朦朦胧胧的状态。我们一般认为，在这个阶段儿童几乎没有数学学习能力，数学教育也自然无从谈起。

我们数学教育者真正关注的是后面三个阶段。

前运算阶段。（在我国，主要是幼儿园阶段）

在这一阶段，儿童先逐渐形成了语言能力，进而可以用语言来表达他们对客观世界的理解。而且儿童开始会计数了，但是这个计数常常需要依赖于具体实物，比如说，3 个苹果、3 个筷子、3 个人、3 个手指，他们还很难摆脱实物，也不容易理解 3 是所有三个物品所抽象出的一种共性。例如，我们也常常会发现，正在上幼儿园的儿童在计数时会“数手指头”，这种现象在儿童七岁以后就不常见了，这就是前运算阶段儿童学习数学的一个重要特征。南京师范大学的涂荣豹老师称其为概念的“实物表象性”（涂荣豹等：《新编数学教学论》，上海：华东师范大学出版社，2006）。这表明这个阶段的儿童不宜进行抽象的概念学习，而应该尽可能依靠实物使其理解简单的计数和简单的、“实物表象式”的运算。

由于计数和运算只能依托于实物，所以这一阶段的儿童不能理解“守恒性”。比如，先给他一碗牛奶，然后再将之倒入一个瘦高的杯子中，此时这个年龄段的孩子很可能会很开心地认为牛奶变多了，而无法意识到牛奶的总量其实是“守恒的”。这是因为，这个阶段的儿童无法抽象地理解数量，他们只能通过高矮、长短这种表象化的东西来进行初步的逻辑判断。这也就意味着，他们很难理解可逆性的运算，比如说，树上有 3 只鸟又飞来 2 只鸟，他可以理解：3+2=5，但是从这里入手他们很难理解 5-2=3（尽管可以通过实物学习简单的减法）。

具体运算阶段。（在我国，主要是小学阶段）

此阶段的儿童已经可以理解守恒性和运算可逆了。思维已经从实物表象性过渡到了内心表象性，直接的特征就是在熟悉的情景和对象的支撑之下，已经可以很大程度上脱离实物直接对数量进行运算。但是仍然很难理解抽象的概念，也很难进行抽象的运算。在代数上看，更适合数字运算，但是很难理解“用字母代替数字的运算”；从几何上看，可以适当地观察一些几何图形，但是很难学习几何推理。代数和几何的大门只是向他们开启了一段窄窄的门缝，而并未彻底打开。对于这一阶段儿童的数学教育，请记住教育家弗拉维尔的一句话：**“儿童不是理论家！”**

因此，在我国，小学数学教学仍以算术为主，在高年级小学生的数学课上可以考虑引入极其简单的一次方程，其简单程度以“小学生如果不用方程也可以用算术解决问题”为宜，以作为学生由具体运算阶段向形式运算阶段的过度。

为了阐述这一阶段数学学习的特点，有一个典型的“难题”可以为例，即所谓“鸡兔同笼”问题：今有雉兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问雉兔各几何？（《孙子算经》）

如果解题者是任何一个接受过初中教育的人，那么这题根本不是难题，因为可以很容易列出方程组：设笼子中有 x 只鸡、y 只兔子，那么可以列出如下方程组

$$\begin{cases} x + y = 35 \\ 2x + 4y = 94 \end{cases}$$

但是，如果解题者是具体运算阶段的儿童，由之前的分析可知，他们是很难理解这种方法的。而你如果是一个小学数学教师，要给学生讲这个题，也不能这样讲。下面的所谓“假设法”就充分考虑到了小学生的认知特点：

假设笼子里全部是鸡，那么应该有$35 \times 2 = 70$只脚，但是实际有 94 只脚，多出了 94-70=24 只脚。这 24 只脚只能来自兔子，每个兔子比鸡多 2 只脚，所以兔子有$24 \div 2 = 12$只。由于鸡和兔子一共有 35 只，所以鸡有$35 - 12 = 23$只。

这个方法在具体讲授时还可以创设情境，让鸡和兔子同时抬起两只脚，本质上与此“假设法”一样。

<u>形式运算阶段</u>。（在我国，基本上是初中及以上阶段）

在这一阶段，学生的思维发生了重大的飞跃。他们逐渐可以真正地摆脱具体的对象而展开抽象思维了。在数学学习上的直观体现，就是他们已经可以理解“用字母代替数字的运算了”，并且已经开始具备一定的空间想象和推理能力了。代数和几何的大门正式向他们打开。他们或适应或不适应地发现，数学课上出现了一种他们以前从未见过的题型——证明题，同时应用题开始适当地减少。这些都是培养学生数学抽象和数学推理能力的需要。

请注意，这一重大飞跃并非易事。这个过程循序渐进，对于有的人需要整个初中阶段完成，有的人在高中阶段才实现，而有的人很可能永远无法到达这一阶段，有的人即使到达了这一阶段，也仅仅是在某些特殊场合才会使用抽象思维。绝大多数 “数学贫困生”就是在这个阶段形成。我认为，尤其重要的是两个时间节点，一是初中一年级，一是高中一年级。之前讲过，很多人的数学就在初中一年级开始跟不上，因为此时的数学教学较之小学的“具体运算阶段”已经发生了本质变化，而并不是所有学生的认知水平都已经达到这个层次。第二个是高中一年级，此时的数学教学较之初中又发生了重大变化，初中数学还是处于由“具体运算”向“形式运算”过渡的阶段，而高中数学已经是比较完全的形式化了；而且高中数学开始呈现出动态性、体系性的特点，这些都是初中数学难以比拟的。作为未来的数学教育者，你们应该尤其留意这两个时间节点。

最后，关于认知发展理论，我还想强调两点。四个认知阶段，有的人可能快一点有的人可能慢一点，现实中也确实有“智力超常”的儿童存在——也就是他比别人快得多地走过前三个阶段，比如当代美国华裔著名数学家陶哲轩。因此，一方面，一旦发现比常人更快进入某个阶段的儿童，比如某个 7-11 岁的儿童**自发地**发现某些形式运算的方法，数学教育者应该对此重视并区别对待；另一方面，任何人，包括智力超常者，也**不可能跳过某个阶段**，所以数学教育者切不可以过度灌输超越发展阶段的数学知识（适当的点拨是可以的，但是必须适度）。

终、小结

本讲主要讲解了三个数学学习理论：认知结构理论（有意义的数学学习）、操作性数学学习理论、认知发展阶段理论（智力发展理论）。

参考文献

[1] 张奠宙，宋乃庆. 数学教育概论. 北京：高等教育出版社，2016.

[2] 罗伯特·斯莱文（美）著，吕红梅，姚梅林 译：北京：人民邮电出版社，2016.

[3] 郑君文，张恩华：数学学习论. 桂林：广西教育出版社，1991.

[4] 曹才翰，蔡金法：数学教育学概论. 南京：江苏教育出版社，1989.

[5] 涂荣豹等：《新编数学教学论》，上海：华东师范大学出版社，2006